ЛЕКЦИЯ-12

Үштік интеграл және оның қасиеттері

Қос интеграл ұғымындағы ауданның орнына көлем қарастырылады. Сондықтан көлем ұғымына тоқталайық. Шекарасы саны шекті жазық көпбұрыштардан тұратын облысты көпжақты облыс деп, жазық көпбұрыштарды оның жақтары деп атайды.

Көпбұрышты фигуралардың көлемдерін табу элементар математикадан белгілі.

Айталық, F облысы берілсін $\{P\}$ осы облыстың ішінде жатқан көпжақты фигуралар, $\{Q\}$ болса T облысының сыртында жатқан көпжақты фигуралар. Олардың көлемдерін сәйкес V_P және V_Q мен белгілейміз. Аудандағыдай

$$V_P^* = \sup_{P \subset T} V_P; \quad V_Q^* = \inf_{Q \subset T} V_Q$$

белгілейміз.

Егер $V_P^* = V_Q^* = V$ болса, онда V берілген T облысының көлемі деп, ал T облысын кубталады немесе көлемі бар деп атайды. Кубталатын облыстар үшін де монотондылық, аддитивтік және инварианттық қасиеттер сақталады.

1-теорема. T облысының көлемі бар болу үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $P \subset T$ және $T \subset Q$ көпжақты P, Q фигуралары табылып $V_Q - V_P < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Жиынның көлемі нөл деп атайды, егер ол көлемі шексіз аз болатын көпжақты фигурада жатса. Енді жоғарыдағы теореманы басқаша келтіруге болады.

2-теорема. T денесі кубталуы үшін оның шекарасының көлемі нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Енді үштік интеграл ұғымын енгіземіз.

Айталық кубталатын T облысында шектелген $f(x,y,z)$ функциясы анықталған. T облысын қалауымызша n бөлікке бөлеміз T_i, $(i = 1,2,\dots,n)$. Әрбір T_i облысынан кез келген $M_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ нүктелерін таңдап алып интегралдық қосынды құрамыз

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta V_i \qquad (1)$$

мұндағы ΔV_i сәйкес T_i бөлігінің көлемі, $d = \max diam T_i$.

Анықтама. Егер d ұмтылғанда (1) интегралдық қосындының шекті шегі бар болса, оны $f(x,y,z)$ функциясының T облысы бойынша алынған үштік немесе үш еселі интегралы деп атайды да

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iiint_T f(x,y,z)dxdydz$$

белгілейді.